Методическое пособие по теме:

 «Квадратные уравнения.

Приёмы устного решения квадратных уравнений».

 Всякое знание остается мертвым, если в учащихся не развивается инициатива и самостоятельность: учащихся нужно приучать не только к мышлению, но и к хотению. Н.А.Умов

**Методическое пособие к теме:**

**«Квадратные уравнения. Приемы устного решения квадратных уравнений».**

 Квадратные уравнения – это фундамент, на котором покоится величественное здание алгебры. Квадратные уравнения находят широкое применение при решении тригонометрических, показательных, иррациональных уравнений и неравенств.

 В школьном курсе математики изучаются формулы корней квадратных уравнений, с помощью которых можно решать любые квадратные уравнения. Однако имеются и другие приёмы решения квадратных уравнений, которые позволяют очень быстро и рационально решать квадратные уравнения. Данные приёмы решения заслуживают внимания, поскольку они не отражены в школьных учебниках математики; овладение данными приёмами поможет учащимся экономить время и эффективно решать уравнения; потребность в быстром решении обусловлена применением тестовой системы вступительных экзаменов.

 В данной работе предлагается теоретический материал по данной теме и представлена практическая часть по применению метода для решения уравнений и задач из сборника ЕНТ. Это будет полезно для планирования и подготовки уроков для учителей и для самостоятельного изучения учащимся как 8-9 классов, так и 10-11 классов при подготовке к ЕНТ и ПГК.

**Содержание:**

* История возникновения
* Приемы устного решения квадратных уравнений.
* Приложение.

**История квадратного уравнения.**

 Найденные древние вавилонские глиняные таблички, датированные где-то между 1800 и 1600 годами до н.э., являются самыми ранними свидетельствами об изучении квадратных уравнений. На этих же табличках изложены методы решения некоторых типов квадратных уравнений. Древнеиндийский математик Баудхаяма в VIII столетии до н.э. впервые использовал квадратные уравнения в форме *ax² = c* и *ax² + bx = c* и привел методы их решения.

 Вавилонские математики примерно с IV века до н.э. и китайские математики примерно со II века до н.э. использовали метод дополнения квадрата для решения уравнений с положительными корнями. Около 300 года до н.э. Евклид придумал более общий геометрический метод решения.

 Первым математиком, который нашел решения уравнения с отрицательными корнями в виде алгебраической формулы, был Брахмагупта (Индия, VII столетие нашей эры).

 Вывод формулы корней квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако он признавал только положительные корни. Итальянские математики 16 века учитывают помимо положительных и отрицательные корни. Лишь в 17 веке благодаря трудам Жирара, Декарта, Ньютона и других ученых способ решения квадратных уравнений принимает современный вид.

**Переходим к приемам устного решения квадратных уравнений.**

**Приём 1: «Способ переброски коэффициентов».**

Рассмотрим квадратное уравнение:

 *a*x² +*b*x +*c*=0, где *a* ≠0.

 Умножая коэффициент с на *a*, и заменив х на у получаем уравнение: y ² + by+ *a*c =0, равносильного данному. Его корни $у\_{1}$ и $у\_{2}$ найдём с помощью теоремы, обратной теореме Виета. Окончательно получаем

 $х\_{1}$= $\frac{у\_{1}}{а}$ и $х\_{2}$= $\frac{у\_{2}}{а}$*.*

 При этом способе коэффициент ***a*** умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют способом «переброски». Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть **точный квадрат**.

Примеры. Решим уравнение 2x²-11x+15=0.

Решение. «Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение: y²-11y+30=0.

 Согласно теореме, обратной теореме Виета $у\_{1}$=5, $у\_{2}$=6.

 Следовательно, $х\_{1}$= $\frac{5}{2}$ =2,5; $х\_{2}$=$\frac{6}{2}$= 3.

 Ответ: 2,5; 3.

**Прием 2. «Свойства коэффициентов квадратного уравнения».**

Пусть дано квадратное уравнение

ax²+bx+c=0, где а≠0.

* **Если a+b+c=0** (т.е. сумма коэффициентов уравнения равна нулю), **то** $x\_{1}$**=1,** $x\_{2}$**=**$\frac{c}{a}$. *Доказательство* . Разделим обе части уравнения на а≠0, получим приведенное квадратное уравнение x² + *x* $\frac{b}{a}$+ $\frac{c}{a}$=0. Согласно теореме Виета $x\_{1}$+$x\_{2}$=-$\frac{b}{a}$;$ x\_{1}∙x\_{2}$=$\frac{c}{a}$.

 По условию a+b+c=0, откуда b = -a -c. Значит, $x\_{1}$+$х\_{2}$=1+$\frac{с}{а}$, $ х\_{1}∙х\_{2}$=1∙$\frac{с}{а}$. Получаем, $х\_{1}$=1, $х\_{2}$=$\frac{с}{а}$, что и требовалось доказать.

* **Если a-b+c=0, или b = c +a, то** $х\_{1}$**=-1,** $х\_{2}$**=-**$\frac{с}{а}$**.**

Примеры. Решим уравнение 345x²-137x-208=0.

 *Решение*. Так как a+b+c=0 (345-137-208=0),

 то $х\_{1}$=1, $х\_{2}$=$\frac{с}{а}$=-$\frac{208}{345}$. Ответ: 1; - $\frac{208}{345}$.

Решим уравнение 132x-247x+115=0.

 *Решение*. Так как a+ b+ c=0 (132-247+115=0),

 то $х\_{1}$=1, $х\_{2}$=$\frac{115}{132}$.

**Приложение.**

1. **Вариант 1-7 задание(сборник тестовых заданий 2010 г)**

 Решите уравнение: 6 cos²х+5cos($\frac{π}{2}$-х)=7

 1(1-sin²х)+5sinх+1=0

 6sin²х-5sinх+1=0

 Пусть sinх=а, тогда 6а²-5а+1=0. С помощью «способа переброски» получаем уравнение

у²-5у+6=0, где по теореме Виета $у\_{1}$=3, $у\_{2}$=2. Следовательно, $а\_{1}$=$\frac{3}{6}$=$\frac{1}{2}$; $а\_{2}$=$\frac{2}{6}$=$\frac{1}{3}$.

Далее возвращаемся к замене и решаем уравнения: sinх=$\frac{1}{2}$ и sinх=$\frac{1}{3}$

 х=$(-1)^{к}\frac{π}{6}$+$πк$, х=$(-1)^{к}$arcsin$\frac{1}{3}$+$πk$, к$ϵΖ$.

Ответ: $(-1)^{к}\frac{π}{6}$+$πк$, $(-1)^{к}$arcsin$\frac{1}{3}$+$πk$, к$ϵΖ$.

1. **Вариант 1-15 задание(сборник тестовых заданий 2010 г)**

Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если $b\_{3}$+$b\_{4}$=2($b\_{4}$+$b\_{5}$).

Решение: $b\_{3}$+$b\_{3}$q=2($b\_{3}$q+$b\_{3}$q²)→ 1+q=2q+2q²→2q²+q-1=0

«Способ переброски»: перебросим коэффициент 2 к свободному члену, получим

а²+а-2=0. Решая полученное уравнение методом коэффициентов, имеем а+b+с=0, значит $а\_{1}$=1; $а\_{2}$=$\frac{с}{а}$=$\frac{-2}{1}$=-2. Следовательно $q\_{1}$ =-1;$ q\_{2}$=$\frac{1}{2}$.

Ответ: -1; $\frac{1}{2}$.

1. **Вариант 4-11 задание(сборник тестовых заданий 2010 г)**

Решите уравнение: $х^{4}$+12х²=16-3х².

Решение: $х^{4}$+15х²-16=0→пусть х²=у→у²+15у-16=0. Метод коэффициентов: а+b+с=0, значит $у\_{1}$=1, $у\_{2}$=$\frac{с}{а}$=$\frac{16}{1}$=16. Вернемся к замене: х²=1 или х²=16→ х=±1; х=±4.

Ответ:-4;-1;1;4.

1. **Вариант 5-12 задание (сборник тестовых заданий 2010 г)**

Решите уравнение: $9^{х+1}$+26·$3^{х}$-3=0.

Решение: Пусть $3^{х}$=а, тогда уравнение примет вид 9а²+26а-3=0. «Способ переброски»:

х²+26х-27=0→по методу коэффициентов $х\_{1}$=1, $х\_{2}$=$\frac{с}{а}$=$\frac{-27}{1}$=-27. Получим $а\_{1}$=$\frac{1}{9}$; $а\_{2}$=$\frac{-27}{9}$=-3.

Вернемся к замене: $3^{х}$=$\frac{1}{9}$ или $3^{х}$=-3→ х=-2.

Ответ: -2.

 Мы рассмотрели способы устного решения квадратных уравнений. Теперь необходимо научиться из нескольких решений выбирать наиболее оригинальное, оптимальное. Так вырабатывается опыт.